ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ВАРИАНТ 1.

Решите дифференциальные уравнения первого порядка. Если указаны начальные условия, найдите также решения, удовлетворяющие этим условиям.

$1. ydx + \left(2x - y^2\right)dy = 0,$

$2. \left(2xy^2 - y\right)dx + \left(y^2 + x + y\right)dy = 0,$

$3. xy' - y = y^2, \ \left(x_0 = 2, y_0 = 0\right).$

Решите дифференциальные уравнения высших порядков.

$4. xy'' = y' \ln \frac{y'}{x},$

$5. yy'' - y'\left(1 + y'\right) = 0.$

ВАРИАНТ 2

Решите дифференциальные уравнения первого порядка.

$1. y' = \frac{x + y - 2}{x - 1},$

$2. xy' + y = 2y^2 \ln x,$

$3. \left(2x - 1 - \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(2y - \frac{1}{x}\right)dy = 0.$

Решите дифференциальное уравнение третьего порядка.

$4. xy''' + y'' = x^2.$

Решите задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка.

$5. y'' = 98y^3, y\left(1\right) = 1, y'\left(1\right) = 7 .$

РЕШЕНИЕ

$1. y' = \frac{x + y - 2}{x - 1} .$

Проведем замену переменных по формулам

$$x - 1 = u, \ y - 1 = v .$$

Получим однородное уравнение

$$\frac{dv}{du} = \frac{u+v}{u},\ \frac{dv}{du} = 1 + \frac{v}{u}.$$

Введем новую неизвестную функцию

$$z = \frac{v}{u},\ v = uz,\ \frac{dv}{du} = u\frac{dz}{du} + z.$$

Уравнение примет вид

$$u\frac{dz}{du} + z = 1 + z,\ u\frac{dz}{du} = 1.$$

Получилось уравнение с разделяющимися переменными. Разделение переменных и последующее интегрирование дает

$$dz = \frac{du}{u},\ \ z = \ln Cu.$$

Вернемся к старым переменным:

$$\frac{v}{u} = \ln Cu,\ v = u\ln Cu,\ y-1 = (x-1)\ln C(x-1).$$

Ответ: $y-1 = (x-1)\ln C(x-1)$.

2. $xy' + y = 2y^2\ln x$ — уравнение Бернулли.

Деление на y^2 и введение новой неизвестной функции $z = \frac{1}{y}$ дает линейное уравнение

$$\frac{z'}{z} - \frac{z}{x^2} = -\frac{2\ln x}{x^2},\ \frac{z}{x} = \frac{2\ln x}{x} + \frac{2}{x} + C,\ z = 2\ln x + 2 + Cx.$$

$$xy' + y = 2y^2\ln x,\ x\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = 2\ln x,$$

$$z = \frac{1}{y}: -xz' + z = 2\ln x,\ xz' - z = -2\ln x.$$

Делением на x^2 формируем полную производную в левой части:

$$\frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2} = -\frac{2\ln x}{x^2},\ \frac{z}{x} = \frac{2\ln x}{x} + \frac{2}{x} + C,\ z = 2\ln x + 2 + Cx.$$

Возврат к исходной неизвестной функции дает равенство

$$\frac{1}{y} = 2\ln x + 2 + Cx .$$

В процессе интегрирования было потеряно решение $y = 0$.

Ответ: $\frac{1}{y} = 2\ln x + 2 + Cx,\ y = 0$.

3. $\left(2x - 1 - \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(2y - \frac{1}{x}\right)dy = 0$ — д.у. в полных дифференциалах.

Ответ: $x^2 - x + \frac{y}{x} - y^2 = C$.

4. $xy''' + y'' = x^2$.

Левая часть — полная производная:

$$\left(xy''\right)' = x^2$$

Поэтому

$$xy'' = \frac{x^3}{3} + C_1,\ y'' = \frac{x^2}{3} + C_1\frac{1}{x},\ y' = \frac{x^3}{9} + C_1\ln|x| + C_2,$$
$$y = \frac{x^4}{36} + C_1 x\ln|x| + C_2 x + C_3.$$

Ответ: $y = \frac{x^4}{36} + C_1 x\ln|x| + C_2 x + C_3$.

5. $y'' = 98y^3,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 7$.

Умножим уравнение на $2y'$, получим уравнение с полными производными

$$2y'y'' = 196y^3y' .$$

Интегрирование дает равенство

$$y'^2 = 49y^4 + C .$$

Для выполнения начальных условий следует взять $C = 0$. Получается уравнение

$$y'^2 = 49y^4,\ y' = 7y^2 .$$

(Знак «+» выбран с учетом начальных условий).

Последнее уравнение интегрируется разделением переменных:

$$\frac{y'}{y^2} = 7,\ -\frac{1}{y} = 7x + D.$$

Для выполнения начальных условий берем $D = -8$:

$$-\frac{1}{y} = 7x - 8,\ y = \frac{1}{8 - 7x}.$$

Ответ: $y = \frac{1}{8 - 7x}$.