

Проверочная работа (продолжительность 45 мин)

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. Примерный вариант

Вариант 1.

1. Измените порядок интегрирований:

$$\int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{x^2+4}} f(x, y) dy.$$

2. Вычислите двойной интеграл

$$\iint_E (x^3 + 3y^3) dx dy, \quad E: x^2 + 4y^2 \leq 8, y \geq 0$$

3. Вычислите тройной интеграл

$$\iiint_V (2x^2 + y^2) dx dy dz, \quad V: x^2 + 4y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3$$

Вариант 2

1. Измените порядок интегрирований:

$$\int_0^2 dx \int_x^{x^2+4} f(x, y) dy = \int_0^2 dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_0^2 f(x, y) dx + \int_4^8 dy \int_{\sqrt{y-4}}^2 f(x, y) dx.$$

2. Вычислите двойной интеграл

$$\begin{aligned} \iint_{E: \frac{x}{2} + \frac{y}{5} \leq 1, x, y \geq 0} (2x^2 + y^2) dx dy &= \left[ \begin{array}{l} x = 2u \\ y = 5v \end{array} \right] = 10 \iint_{E_1: u+v \leq 1, u, v \geq 0} (8u^2 + 25v^2) dudv = \\ &= 330 \iint_{E_1: u+v \leq 1, u, v \geq 0} v^2 dudv = \frac{330}{12} = \frac{55}{2} \end{aligned}$$

3. Вычислите тройной интеграл

$$I = \iiint_{V: x^2 + 4y^2 \leq 4; 0 \leq z \leq 3} (2y^2 + z^2) dx dy dz = \left[ \begin{array}{l} x = 2u \\ y = v \\ z = 3w \end{array} \right] = 6 \iiint_{V_1: u^2 + v^2 \leq 1; 0 \leq w \leq 1} (2v^2 + 9w^2) dudv dw;$$

$$\iiint_{V_1} (u^2 + v^2) dudv dw = 2\pi \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{2}; \quad \iiint_{V_1} w^2 dudv dw = \pi \int_0^1 w^2 dw = \frac{\pi}{3};$$

$$I = 3\pi + 18\pi = 21\pi$$