Глава V. СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Основные определения

1⁰. Определение

Система вида

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1\left(t, x^1, \ldots, x^n\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}^n = f^n\left(t, x^1, \ldots, x^n\right), \end{cases} \qquad (1)$$

где $f^1, \ldots, f^2$ — непрерывные функции в области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, называется нормальной системой n-го порядка обыкновенных дифференциальных уравнений.

(Здесь верхние индексы нумеруют компоненты вектора, столбца. Верхние индексы сейчас не являются показателями степени).

Набор функций

$$x^1 = \varphi^1(t), \ldots x^n = \varphi^n(t);\ t \in (\alpha, \beta)$$

называется решением системы (1), если он этой системе удовлетворяет, т.е.

1) функции $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ непрерывно дифференцируемы,

2) $\forall t \in (a, \beta)\ \left(t, \varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t)\right) \in G$,

3) $\forall t \in (\alpha, \beta)\ \dot{\varphi}^k(t) = f^k\left(t, \varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t)\right),\ k = 1, \ldots, n$.

Представляется удобным ввести векторную запись системы (1). Пусть

$$f : G \to \mathbb{R}^n \text{ —}$$

отображение с координатными функциями $f^1, \ldots, f^n$, $x = \left(x^1, \ldots, x^n\right) \in \mathbb{R}^n$, $\dot{x} = \left(\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n\right)$, тогда система (1) принимает вид

$$\dot{x} = f(t, x),\ (t, x) \in G. \qquad (2)$$

Решение системы (2) — это непрерывно дифференцируемая вектор-функция $x = \varphi(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, удовлетворяющая системе (уравнению) (2):

$$\forall t \in (\alpha, \beta)\ \dot{\varphi}(t) = f\left(t, \varphi(t)\right).$$

2⁰. Задача Коши состоит в построении решения уравнения (2), удовлетворяющего начальному условию

$$x\big|_{t_0} = x_0 \qquad (3)$$

($\left(t_0, x_0\right) \in G$).

3⁰. Теорема существования и единственности.

Пусть отображение f непрерывно дифференцируемо.

Тогда задача Коши для системы (2) с начальным условием (3) имеет единственное решение.

4⁰. Сведение дифференциального уравнения n-го порядка к нормальной системе.

Дифференциальное уравнение

$$x^{(n)} = f\left(t, x, \dot{x} \ldots, x^{(n-1)}\right) \qquad (4)$$

равносильно нормальной системе

$$
\begin{cases}
\dot{x}^1 = x^2, \\
\cdots\cdots\cdots \\
\dot{x}^{n-1} = x^n, \\
\dot{x}^n = f\left(t, x^1, \ldots x^n\right)
\end{cases}
\tag{5}
$$

Если функция $x = \varphi(t)$ — решение уравнения, то набор $\left(\varphi, \dot{\varphi}, \ldots, \varphi^{(n-1)}\right)$ — решение системы; если $\left(\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n\right)$ — решение системы, то φ^1 — решение уравнения.

5⁰. Метод исключения. При некоторых дополнительных условиях систему удается свести к одному уравнению. Рассмотрим для простоты систему третьего порядка.

$$
\begin{cases}
\dot{x} = f\left(t, x, y, z\right), \\
\dot{y} = g\left(t, x, y, z\right), \\
\dot{z} = h\left(t, x, y, z\right).
\end{cases}
$$

Дифференцирование первого уравнение дает

$$
\ddot{x} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} f + \frac{\partial f}{\partial y} g + \frac{\partial f}{\partial z} h \text{ , т.е.}
$$

$$
\ddot{x} = G\left(t, x, y, z\right)
$$

Повторное дифференцирование приводит к уравнению

$$
\dddot{x} = H\left(t, x, y, z\right) \tag{6}
$$

При некоторых дополнительных условиях система

$$
\begin{cases}
\dot{x} = f\left(t, x, y, z\right), \\
\ddot{x} = G\left(t, x, y, z\right)
\end{cases}
\tag{7}
$$

равносильна системе

$$
\begin{cases}
y = p\left(t, x, \dot{x}, \ddot{x}\right), \\
z = q\left(t, x, \dot{x}, \ddot{x}\right).
\end{cases}
\tag{8}
$$

Подставляя выражения (8) в уравнение (6), получаем дифференциальное уравнение

$$
\dddot{x} = \Phi\left(t, x, \dot{x}, \ddot{x}\right) \tag{9}
$$

третьего порядка.

Имея решение уравнения (9), решение системы строим с помощью соотношений (8).

§ 2. Линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений

Линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$
\begin{cases}
\dot{x}^1 = a_1^1\left(t\right)x^1 + \cdots a_n^1\left(t\right)x^n + f^1\left(t\right), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dot{x}^n = a_1^n\left(t\right)x^1 + \cdots a_n^n\left(t\right)x^n + f^n\left(t\right),
\end{cases}
\tag{1}
$$

$a_1^1, \ldots, a_n^n;\ f^1, \ldots, f^n$ непрерывны на интервале $\left(\alpha, \beta\right)$.

Система

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = a_1^1(t)x^1 + \cdots a_n^1(t)x^n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}^n = a_1^n(t)x^1 + \cdots a_n^n(t)x^n, \end{cases} \tag{2}$$

называется линейной однородной (соответствующей системе(1)).
Если ввести в рассмотрение матрицу

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_1^1(t)\cdots a_n^1(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^n(t)\cdots a_n^n(t) \end{pmatrix},$$

то наши системы можно записать в матричном виде

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \tag{1'}$$

$$\dot{x} = A(t)x \tag{2'}$$

Теорема существования и единственности.
Если $t_0 \in (\alpha, \beta)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, то задача Коши для системы (1) с начальным условием

$$x\big|_{t_0} = x_0 \tag{3}$$

имеет единственное решение $x = \varphi(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, определенное на всем интервале (α, β).

§ 3. Линейная однородная система обыкновенных дифференциальных уравнений

В этом параграфе мы рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1}$$

Предложение 1. Решения системы (1) образуют линейное пространство, подпространство линейного пространства непрерывно дифференцируемых вектор-функций, определенных на (α, β).

Доказательство. Пусть φ, ψ — решения системы (1), т.е. $\dot{\varphi} = A\varphi$, $\dot{\psi} = A\psi$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\chi = \lambda\varphi + \mu\psi$. Тогда

$$\dot{\chi} = \lambda\dot{\varphi} + \mu\dot{\psi} = \lambda A\varphi + \mu A\psi = A(\lambda\varphi + \mu\psi) = A\chi,$$

χ — решение системы (1).

Определение Вектор-функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ на (α, β) называются линейно зависимыми, если существует такой ненулевой набор чисел $\lambda^1, \ldots, \lambda^n$, что

$$\lambda^1\varphi_1 + \ldots + \lambda^n\varphi_n = 0.$$

Определение. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — вектор-функции на (α, β). Функция

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1^1(t)\cdots\varphi_n^1(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_1^n(t)\cdots\varphi_n^n(t) \end{vmatrix}$$

называется определителем Вронского. Определитель составлен из координатных столбцов вектор-функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Предложение 2. Если $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ линейно зависимы, то $W = 0$.

Доказательство. Линейная зависимость функций означает линейную зависимость столбцов матрицы. Поэтому определитель равен нулю.

Предложение 3. Пусть $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ — решения системы (1), $t_0\in(\alpha,\beta)$, $W(t_0)=0$.

Тогда $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ линейно зависимы.

Доказательство. Пусть $W(t_0)=0$, тогда столбцы определителя $W(t_0)$ линейно зависимы, найдется такой ненулевой набор чисел $\lambda^1,\ldots,\lambda^n$, что $\lambda^1\varphi_1(t_0)+\ldots+\lambda^n\varphi_n(t_0)=0$. Функция $\varphi=\lambda^1\varphi_1+\ldots+\lambda^n\varphi_n$ является решением задачи Коши с нулевым начальным условием в точке t_0. По теореме единственности $\varphi=0$, функции $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ линейно зависимы.

Альтернатива Вронского. Пусть $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ — решения системы (1).

Тогда

$\forall t\in(\alpha,\beta)\ W(t)=0$ или $\forall t\in(\alpha,\beta)\ W(t)\neq 0$.

Формула Лиувилля. Пусть $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ — решения системы (1), W — определитель Вронского.

Тогда

$$W(t)=W(t_0)e^{P(t)}, \tag{2}$$

где $P(t)$ — первообразная для следа $\mathrm{tr}(A(t))=\sum_{k=1}^{n}a_k^k(t)$ матрицы A, $P(t)=\int_{t_0}^{t}tr(A(s))ds$.

Доказательство.

Производная $\dot W(t)$ записывается в виде суммы n определителей, в каждом из которых дифференцированию подвергнута одна строка. Рассмотрим, например первый из определителей

$$\begin{vmatrix}\dot\varphi_1^1(t)\cdots\dot\varphi_n^1(t)\\ \varphi_1^2(t)\cdots\varphi_n^2(t)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi_1^n(t)\cdots\varphi_n^n(t)\end{vmatrix}$$

В этом определителе первая строка в силу системы (1) является линейной комбинацией строк определителя Вронского (с коэффициентами $a_1^1(t),\ldots,\ a_n^1(t)$). Пользуясь линейностью определителя по строке, мы можем записать этот определитель в виде суммы n слагаемых:

$$a_1^1(t)\begin{vmatrix}\varphi_1^1(t)\cdots\varphi_n^1(t)\\ \varphi_1^2(t)\cdots\varphi_n^2(t)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi_1^n(t)\cdots\varphi_n^n(t)\end{vmatrix}+a_2^1(t)\begin{vmatrix}\varphi_1^2(t)\cdots\varphi_n^2(t)\\ \varphi_1^2(t)\cdots\varphi_n^2(t)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi_1^n(t)\cdots\varphi_n^n(t)\end{vmatrix}+\cdots+a_n^1(t)\begin{vmatrix}\varphi_1^n(t)\cdots\varphi_n^n(t)\\ \varphi_1^2(t)\cdots\varphi_n^2(t)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi_1^n(t)\cdots\varphi_n^n(t)\end{vmatrix}.$$

Первое слагаемое равно $a_1^1(t)W(t)$, а остальные оказываются нулями, поскольку определители содержат две одинаковые строки.

Повторив рассуждение для остальных слагаемых, мы получим формулу

$$\dot W(t)=\left(a_1^1(t)+\cdots+a_n^n(t)\right)W(t),\ \dot W(t)=tr(A(t))W(t).$$

Проведенные вычисления можно представить одной строкой:

$$\dot{W}(t)=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_1^{i-1}(t)\cdots\varphi_n^{i-1}(t) \\ \dot{\varphi}_1^{i}(t)\ \ \cdots\ \ \dot{\varphi}_n^{i}(t) \\ \varphi_1^{i+1}(t)\cdots\varphi_n^{i+1}(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_j^i\begin{vmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_1^{i-1}(t)\cdots\varphi_n^{i-1}(t) \\ \varphi_1^{j}(t)\ \ \cdots\ \ \varphi_n^{j}(t) \\ \varphi_1^{i+1}(t)\cdots\varphi_n^{i+1}(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}a_i^iW(t)=\mathrm{tr}\big(A(t)\big)W(t)$$

Определитель Вронского — решение линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка $\dot{z}=tr\big(A(t)\big)z$. Справедлива формула (2).

Предложение 4. Пространство решений системы (1) n-мерно.
Доказательство. Выберем $t_0\in(\alpha,\beta)$**.** По теореме существования и единственности система (1) имеет решения $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$, удовлетворяющие начальным условиям $\varphi_1(t_0)=e_1,\ldots,\varphi_n(t_0)=e_n$ (здесь $e_1,\ldots,e_n$ — канонический базис пространства $\mathbb{R}^n$). Эти решения образуют линейно независимую систему. Размерность пространства решений не меньше n. Пусть φ — произвольное решение, тогда $\varphi-\varphi^1(t_0)\varphi_1-\cdots-\varphi^n(t_0)\varphi_n$ — решение задачи Коши с нулевым начальным условием. По теореме единственности $\varphi=\varphi^1(t_0)\varphi_1-\cdots-\varphi^n(t_0)\varphi_n$, φ — линейная комбинация $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$. Размерность пространства решений не больше n. $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$— базис пространства решений.
Определение. Базис пространства решений называется фундаментальной системой решений (ФСР).
ФСР, построенная в Предложении 2, называется ФСР, нормированной в точке t_0.
Теорема 1. Пусть $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ — ФСР системы (1).
Тогда формула

$$x=C^1\varphi_1(t)+\cdots+C^n\varphi_n(t). \tag{3}$$

дает общее решение системы (1).
При любых $C^1,\ldots,C^n$ функция $C^1\varphi_1+\cdots+C^n\varphi_n$ —решение, и все решения так представляются.
Определение. Пусть $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ — ФСР системы (1). Рассмотрим матрицу $\Phi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$, составленную из столбцов $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$. Эта матрица называется фундаментальной матрицей системы (1).
Теперь общее решение можно записать в виде

$$x(t)=\Phi(t)C, \tag{4}$$

где C — произвольный столбец.
Заметим, что для фундаментальной матрицы справедливо соотношение

$$\dot{\Phi}=A\Phi.$$

Φ — невырожденная матрица, удовлетворяющая уравнению (1).

§ 4. Линейная неоднородная система обыкновенных дифференциальных уравнений

1^0. Теорема 1. Общее решение
Мы рассматриваем линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) \tag{1}$$

и соответствующую ей линейную однородную систему

$$\dot{x} = A(t)x \tag{2}$$

Если ψ_0 – решение (1), а φ — решение (2), то $\psi = \psi_0 + \varphi$ — решение (1); если ψ_0, ψ — решения (1), то $\varphi = \psi - \psi_0$ —решение (1). Мы можем сказать, что формула $\psi = \psi_0 + \varphi$ дает общий вид решения линейной неоднородной системы.

Если $\varphi_1, \dots, \varphi_n$— фундаментальная система решений системы (2), а ψ_0 – решение (1), то формула

$$x = \psi_0(t) + C^1\varphi_1(t) + \dots + C^n\varphi_n(t) \tag{3}$$

дает общее решение линейной неоднородной системы (1).

Доказательство.

1) Если ψ_0 – решение (1), а φ — решение (2), то

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 + \dot{\varphi} = A\psi_0 + f + A\varphi = A(\psi_0 + \varphi) + f = A\psi + f\,,$$

ψ — решение (1).

2) Если ψ_0, ψ — решения (1), а $\varphi = \psi - \psi_0$, то

$$\dot{\varphi} = \dot{\psi} - \dot{\psi}_0 = (A\psi + f) - (A\psi_0 + f) = A(\psi - \psi_0) = A\varphi\,,$$

φ — решение линейной однородной системы.

Из доказанных утверждений видно, что любая функция, полученная по формуле (3) — решение линейной неоднородной системы; наоборот, любое решение ψ записывается в виде $\psi = \psi_0 + \varphi$, а φ, в свою очередь, записывается в виде $\varphi = C^1\varphi_1 + \dots + C^n\varphi_n$, так что ψ получается по формуле (3).

2^0. Метод вариации произвольных постоянных.

Если $\varphi_1, \dots, \varphi_n$— фундаментальная система решений системы (2), то решение линейной неоднородной системы (1) можно найти по формуле

$$\psi = C^1(t)\varphi_1(t) + \dots + C^n(t)\varphi_n(t), \text{ где} \tag{4}$$

функции $C^1, \dots, C^n$ находятся из системы линейных уравнений

$$\dot{C}^1\varphi_1 + \dots + \dot{C}^n\varphi_n = f\,. \tag{5}$$

Действительно,

$$\dot{\psi} = C^1\dot{\varphi}_1 + \dots + C^n\dot{\varphi}_n + \dot{C}^1\varphi_1 + \dots + \dot{C}^n\varphi_n = C^1A\varphi_1 + \dots + C^nA\varphi_n + f = A\psi + f\,,$$

ψ —решение системы (1).

§ 5. Линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

1^0. Линейная однородная система. Случай характеристического многочлена с простыми корнями.

$$\dot{x} = Ax\,,\ A \text{ — комплексная матрица.} \tag{1}$$

Предложение 1.

$x = Ue^{\lambda_0 t}$, $U \neq 0$ — решение системы (1) $\Leftrightarrow$ λ_0 — собственное число, U — собственный вектор матрицы A.

Доказательство.

$x = Ue^{\lambda_0 t}$, $U \neq 0$ — решение системы (1) $\Leftrightarrow$ $\lambda_0 U e^{\lambda_0 t} = AUe^{\lambda_0 t}$ $\Leftrightarrow$ $AU = \lambda_0 U$ $\Leftrightarrow$ λ_0 — собственное число, U — собственный вектор матрицы A.

Теорема 1.

Пусть A имеет n различных собственных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $U_1, \ldots, U_n$ — соответствующие собственные векторы.

Тогда функции

$$U_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, U_n e^{\lambda_n t} \tag{2}$$

образуют ФСР системы (1).

Доказательство.

По предложению 1 функции совокупности (2) являются решениями системы (1). Проверим линейную независимость. Проведем индукцию по n. При $n = 1$ линейная независимость обеспечена отличием собственного вектора от нуля. Допустим, линейная независимость установлена для совокупности, включающей n функций. Рассмотрим совокупность из $n+1$ функции. Допустим, линейная комбинация этих функций с коэффициентами $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n, \alpha^{n+1}$ оказалась нулевой функцией:

$$\alpha^1 U_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha^2 U_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + \alpha^n U_n e^{\lambda_n t} + \alpha^{n+1} U_{n+1} e^{\lambda_{n+1} t} = 0. \tag{3}$$

Тогда

$$\alpha^1 U_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_{n+1})t} + \alpha^2 U_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_{n+1})t} + \cdots + \alpha^n U_n e^{(\lambda_n - \lambda_{n+1})t} + \alpha^{n+1} U_{n+1} = 0.$$

Дифференцирование дает равенство

$$\alpha^1 U_1 (\lambda_1 - \lambda_{n+1}) e^{(\lambda_1 - \lambda_{n+1})t} + \alpha^2 U_2 (\lambda_2 - \lambda_{n+1}) e^{(\lambda_2 - \lambda_{n+1})t} + \cdots + \alpha^n U_n (\lambda_n - \lambda_{n+1}) e^{(\lambda_n - \lambda_{n+1})t} = 0.$$

По индукционному предположению $\alpha^1 = \cdots = \alpha^n = 0$; соотношение (3) сводится к $\alpha^{n+1} U_{n+1} e^{\lambda_{n+1} t} = 0$, так что и $\alpha^{n+1} = 0$. Линейная комбинация функций (2) оказывается нулевой только при нулевых коэффициентах, функции (2) линейно независимы.

Замечание. ФСР из функций вида $Ue^{\lambda t}$ можно построить и в том случае, если матрица имеет кратные корни, но каждому собственному числу отвечает столько линейно независимых собственных векторов, какова кратность собственного числа.

В такой ситуации в пространстве $\mathbb{R}^n$ существует базис из собственных векторов матрицы A, матрица A подобна диагональной матрице, т.е. существует такая невырожденная матрица K, что $B = K^{-1} A K$ — диагональная матрица. Выполним в (1) замену переменной по формуле

$$x = Ky: \tag{4}$$

$K\dot{y} = AKy,\ \dot{y} = K^{-1} AKy$,

$$\dot{y} = By. \tag{5}$$

В координатах система (5) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{y}^1 = \lambda_1 y^1, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dot{y}^n = \lambda_n y^n. \end{cases} \tag{6}$$

Система распадается на отдельные уравнения и легко интегрируется:

$$\begin{cases} y^1 = C^1 e^{\lambda_1 t}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y^n = C^n e^{\lambda_n t}. \end{cases} \tag{7}$$

Формулы (7) дают общее решение системы (6), а преобразование (4) приводит к общему решению (1).

При решении конкретных задач можно не проводить явное приведение системы к диагональному виду, а построить ФСР в форме (2), взяв максимальную линейно независимую систему собственных векторов для каждого собственного числа матрицы A.

2^0. Линейная однородная система. Случай характеристического многочлена с кратными корнями.

Приведем матрицу к форме Жордана:

$$B = K^{-1}AK \text{ — жорданова матрица.} \tag{8}$$

Замена (4) дает систему (5), которая распадается на несколько систем, имеющих своими матрицами жордановы клетки. Рассмотрим одну из таких систем.

$$\begin{cases} \dot{y}^1 = \lambda y^1, \\ \dot{y}^2 = y^1 + \lambda y^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{y}^k = y^{k-1} + \lambda y^k. \end{cases} \tag{9}$$

Интегрирование дает общее решение

$$\begin{cases} y^1 = C^1 e^{\lambda t}, \\ y^2 = C^1 t e^{\lambda t} + C^2 e^{\lambda t}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^k = C^1 \dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda t} + \dots + C^k e^{\lambda t}. \end{cases} \tag{10}$$

ФСР системы (9) состоит из функций

$$\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \dfrac{t^2}{2!} \\ \dots \\ \dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!} \end{pmatrix} e^{\lambda t}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \\ \dots \\ \dfrac{t^{k-2}}{(k-2)!} \end{pmatrix} e^{\lambda t}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t}. \tag{11}$$

Объединяя ФСР систем вида (9), мы получаем ФСР

$$\psi^1, \dots, \psi^n$$

системы (5).

Функции

$$\varphi^1 = K\psi^1, \dots, \varphi^n = K\psi^n \tag{12}$$

образуют ФСР системы (1).

Явно приводить матрицу к форме Жордана не обязательно. Можно заметить, что ФСР (12) состоит из функций вида

$$U(t)e^{\lambda t},$$

где λ — собственное число матрицы A, U — столбец из многочленов, степени которых не превосходят $k-1$ (k — кратность собственного числа) Указанную оценку можно уточнить, степени многочленов не превзойдут порядка соответствующей жордановой клетки.

Для получения ФСР следует построить достаточное число линейно независимых решений указанного вида. Можно начать с построения решений вида $Ue^{\lambda t}$, U — собственный вектор, затем построить решения $\left(Ut+V\right)e^{\lambda t}$, $\left(Ut^2+Vt+W\right)e^{\lambda t}$ и т. д. до получения требуемого числа решений.

3[0]. Построение вещественной ФСР.

Сосредоточимся на рассмотрении вещественных систем. Вещественная матрица может иметь невещественные собственные числа. Поэтому предложенная процедура приводит нас к ФСР, в которой могут присутствовать невещественные функции. Если система

$$\dot{x} = Ax$$

с вещественными коэффициентами имеет комплексное решение φ, то решениями являются и $\operatorname{Re}\varphi, \operatorname{Im}\varphi$. Можно считать, что ФСР включает в себя вместе с φ и функцию $\bar{\varphi}$, так что пара функций $\operatorname{Re}\varphi, \operatorname{Im}\varphi$ заменяет пару $\varphi, \bar{\varphi}$. Операция овеществления сохраняет число функций, причем старая и новая системы являются линейными комбинациями друг для друга:

$$\operatorname{Re}\varphi = \frac{1}{2}\left(\varphi+\bar{\varphi}\right),\ \operatorname{Im}\varphi = \frac{1}{2i}\left(\varphi-\bar{\varphi}\right);$$

$$\varphi = \operatorname{Re}\varphi + i\operatorname{Im}\varphi,\ \bar{\varphi} = \operatorname{Re}\varphi - i\operatorname{Im}\varphi.$$

Получаемая вещественная совокупность тоже окажется ФСР.

Заметим, что достаточно построить решения, отвечающие одному из собственных чисел $\lambda, \bar{\lambda}$ и выделить вещественные и мнимые части этих решений.

4[0]. Линейная неоднородная система.

Вопрос интегрирования линейной неоднородной системы

$$\dot{x} = Ax + f\left(t\right) \tag{13}$$

принципиально решается методом вариации произвольных постоянных, но для систем со свободными членами специального вида удобнее пользоваться методом неопределенных коэффициентов.

Если

$$f\left(t\right) = M_l\left(t\right)e^{\lambda_0 t},$$

где $M_l\left(t\right)$ — столбец из многочленов степени не выше l, можно попытаться найти решение в виде

$$x = S_l\left(t\right)e^{\lambda_0 t}, \tag{14}$$

где $S_l\left(t\right)$ — столбец из многочленов степени не выше l. Возможность такого построения гарантируется, если λ_0 не является собственным числом матрицы A. Если же λ_0 — собственное число кратности k, то может потребоваться повышение степени многочленов, но не более чем на k единиц, можно найти решение в виде

$$x = S_{l+k}\left(t\right)e^{\lambda_0 t}. \tag{15}$$

Убедимся в возможности найти решение в форме (14) или (15).

Замена переменных $x = Ky$ сводит систему (13) к системе с жордановой матрицей

$$\dot{y} = By + g\left(t\right). \tag{16}$$

Последняя система распадается на системы с жордановыми клетками. Рассмотрим одну из таких систем

$$\begin{cases} \dot{y}^1 = \lambda y^1 + N_l^1(t)e^{\lambda_0 t}, \\ \dot{y}^2 = y^1 + \lambda y^2 + N_l^2(t)e^{\lambda_0 t}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{y}^k = y^{k-1} + \lambda y^k + N_l^k(t)e^{\lambda_0 t}. \end{cases}$$

Предположим, что $\lambda_0 \neq \lambda$. Первое уравнение имеет решение вида $y^1 = T_l^1(t)e^{\lambda_0 t}$. Подставив, это выражение во второе уравнение, получаем уравнение

$$\dot{y}^2 = \lambda y^2 + \tilde{N}_l^2(t)e^{\lambda_0 t}$$

с решением вида $y_2 = T_l^2(t)e^{\lambda_0 t}$, и т.д. Получается решение вида $y = T_l(t)e^{\lambda_0 t}$.
Если $\lambda_0 = \lambda$, то первое уравнение имеет решение вида $y_1 = tT_l(t)e^{\lambda_0 t}$. Подставив, это выражение во второе уравнение, получаем уравнение

$$\dot{y}^2 = \lambda y^2 + \tilde{N}_{l+1}^2(t)e^{\lambda_0 t}$$

с решением вида $y^2 = tT_{l+1}^2(t)e^{\lambda_0 t}$, и т.д. Получается решение вида $y = T_{l+k}(t)e^{\lambda_0 t}$.
Возвращаясь к старым переменным ($x = Ky$), получаем решение вида (14) или (15) системы (13).
Для вещественной системы

$$\dot{x} = Ax + e^{\alpha x}\left(M_l(t)\cos\beta t + N_m(t)\sin\beta t\right) \tag{17}$$

решение можно найти в виде

$$x = e^{\alpha t}\left(S_\nu(t)\cos\beta t + T_\nu(t)\sin\beta t\right),\ (\nu = \max\{l, m\}), \tag{18}$$

если $\alpha \pm i\beta$ не являются с.ч. матрицы A, и в виде

$$x = e^{\alpha t}\left(S_{\nu+k}(t)\cos\beta t + T_{\nu+k}(t)\sin\beta t\right), \tag{19}$$

если $\alpha \pm i\beta$ — с.ч. кратности k для матрицы A.
(Рассмотрим систему $\dot{x} = Ax + e^{(\alpha+i\beta)x}\left(M_l(t) - iN_m(t)\right)$. По доказанному система имеет решение вида $x = U_{l+k}(t)e^{(\alpha+\beta i)t}$. Вещественная часть этого решения имеет вид (19) и служит решением для (17).

5⁰. Примеры.

Пример 1. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Эта матрица имеет собственные числа $\lambda_{1,2,3} = 1$.

Рассмотрим линейную однородную систему

$$\dot{x} = Ax \tag{20}$$

Алгебраическая система $AU = U$, или $BU = 0$, где $B = A - E = A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, имеет с точностью до числового множителя единственное решение $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$U=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ — собственный вектор матрицы A, Ue^t — решение системы (20).

Дополнительное решение ищем в виде

$$x=\left(Ut+V\right)e^t.$$

Подстановка в систему дает

$$Ut+V+U=A\left(Ut+V\right),$$

$$BU=0;\ \ BV=U.$$

Можем взять $U=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Функция $\left(Ut+V\right)e^t=\begin{pmatrix}2t\\t\\1\end{pmatrix}e^t$ —решение системы.

Третье решение найдем в виде

$$x=\left(Ut^2+2Vt+W\right)e^t:$$

$$\left(Ut^2+2Vt+W+2Ut+2V\right)e^t=A\left(\left(Ut^2+2Vt+W\right)e^t\right);$$

$$BU=0;\ BV=U;\ BW=2V$$

Полагаем $U=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $W=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$. Функция $\begin{pmatrix}2t^2\\t^2+1\\2t+2\end{pmatrix}e^t$ —решение системы.

Решения $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}e^t$, $\begin{pmatrix}2t\\t\\1\end{pmatrix}e^t$, $\begin{pmatrix}2t^2\\t^2+1\\2t+2\end{pmatrix}e^t$ образуют ФСР, формула

$$X=c_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}e^t+c_2\begin{pmatrix}2t\\t\\1\end{pmatrix}e^t+c_3\begin{pmatrix}2t^2\\t^2+1\\2t+2\end{pmatrix}e^t$$

дает общее решение линейной однородной системы (20).

Рассмотрим линейную неоднородную систему

$$\dot{x}=Ax+\begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix}e^t \tag{21}$$

Следует попытаться найти решение в виде $x=Se^t$. Для отыскания столбца S получаем систему $BS=\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2&-4&2\\1&-2&1\\-1&2&0\end{pmatrix}S=\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}$, не имеющую решений.

Ищем решение в виде $x=\left(Pt^3+Qt^2+Rt+S\right)e^t$.

Для столбцов P, Q, R, S должны выполняться условия

$$BP = 0,\ BQ = 3P,\ BR = 2Q,\ BS = R + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Возьмем $P = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $R = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, для отыскания столбца S получаем систему

$BS = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3\alpha \\ 6\alpha \end{pmatrix}$. Система оказывается совместной только при $\alpha = 1$, решением является, например, столбец $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Построено решение $\begin{pmatrix} 2t^3 \\ t^3 + 3t + 3 \\ 3t^2 + 6t + 9 \end{pmatrix} e^t$ для системы (21).

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} 2\cos t + 14\sin t \\ 3\cos t + 2\sin t \\ -4\cos t - 8\sin t \end{pmatrix} \tag{22}$$

Решение ищем в виде $x = P\cos t + Q\sin t$. Подстановкой в (22) получаем

$$-P\sin t + Q\cos t = AP\cos t + AQ\sin t + \begin{pmatrix} 2\cos t + 14\sin t \\ 3\cos t + 2\sin t \\ -4\cos t - 8\sin t \end{pmatrix}$$

$$Q = AP + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix},\ -P = AQ + \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$-P = A\left(AP + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix},\quad -P = A^2P + A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$, то для отыскания столбца P получаем систему

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} P + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} = 0,$$

решением которой является столбец $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Формула $Q = AP + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ дает $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Система (22) имеет решение $x = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ 2\cos t + 3\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$.

Пример 2. $$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \ \lambda_{1,2,3} = 2,$$

$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$, $x_3 = \begin{pmatrix} t+1 \\ t \\ 2t \end{pmatrix} e^{2t}$ — ФСР системы $\dot{x} = Ax$.

Система $\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} -3\cos t - 2\sin t \\ -3\sin t \\ -2\cos t - 2\sin t \end{pmatrix}$ имеет решение $x = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$

Пример 3. $$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 7 & 6 & -5 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \ \lambda_{1,2,3} = 3, \ B = A - 3E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 7 & 3 & -5 \\ 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$BU = 0$ для $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $BV = U$ для $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; для $BW = V$, $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x_1 = Ue^{3t}$, $x_2 = (Ut + V)e^{3t}$, $x_3 = (Ut^2 + 2Vt + 2W)e^{3t}$ — ФСР системы $\dot{x} = Ax$.

Система $\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$ имеет решение $x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$. Система $\dot{x} = Ax - \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} e^{3t}$ имеет решение $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t}$. Система $\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix} e^{3t}$ имеет решение $x = \left(2Ut^3 + 6Vt^2 + 12Wt + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) e^{3t}$.

Пример 5. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \ \lambda_1 = -2, \ \lambda_{2,3} = 2 \pm 2i.$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}, \; x_2 = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} e^{2t}, \; x_3 = \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \sin 2t - \cos 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} e^{2t} \text{ — ФСР системы } \dot{x} = Ax .$$

Пример 6. $A = \begin{pmatrix} -16 & 36 & -5 \\ -10 & 22 & -3 \\ -10 & 20 & -2 \end{pmatrix}, \; \lambda_1 = 2, \; \lambda_{2,3} = 1 \pm i$

$$\begin{cases} x = 2e^{2t} \\ y = e^{2t} \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = e^t \left(9\cos t + 2\sin t\right) \\ y = 5e^t \cos t \\ z = e^t \left(5\cos t - 5\sin t\right) \end{cases} \quad \begin{cases} x = e^t \left(9\sin t - 2\cos t\right) \\ y = 5e^t \sin t \\ z = e^t \left(5\sin t + 5\cos t\right) \end{cases} \text{ — ФСР системы } \dot{x} = Ax .$$

Пример 7. $A = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; \lambda_{1,2,3} = 1$

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 4t-1 \\ 2t \\ t \end{pmatrix} e^t \text{ — общее решение системы } \dot{x} = Ax .$$

Система $\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ имеет решение $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Система $\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$ имеет решение $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$. Система $\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$ имеет решение $x = \begin{pmatrix} -2t+1 \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} e^t$. Система $\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$ имеет решение $x = \begin{pmatrix} 4t^2 - 2t \\ 2t^2 \\ t^2 \end{pmatrix} e^t$.