Лекция 4 23.09.2025 (3 часа)

§6. Условия разложимости функции в ряд Тейлора

1^0. Предложение 1.

Пусть функция f определена и имеет производные всех порядков на интервале $\left(x_0-h,\, x_0+h\right)$.

Для разложимости функции f в ряд Тейлора необходимо и достаточно условие

$$\forall x\in\left(x_0-h,\, x_0+h\right)\ R_n\left(x\right)=f\left(x\right)-T_n\left(x\right)\underset{n}{\to}0.$$

Если f — сумма ряда Тейлора, то

$$R_n\left(x\right)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)^k \text{ —}$$

сумма остатка ряда Тейлора.

2^0. Предложение 2.

Пусть функция f определена и имеет производные всех порядков на интервале $\left(x_0-h,\, x_0+h\right)$.

и

$$\exists M>0\ \ \forall x\in\left(x_0-h,\, x_0+h\right),\ n=0,1,2,\ldots\ \left|f^{(n)}\left(x\right)\right|\le M .$$

Тогда на интервале $\left(x_0-h,\, x_0+h\right)$ функция f разлагается в ряд Тейлора,

$$\forall x\in\left(x_0-h,\, x_0+h\right)\ f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)^n .$$

Доказательство.

Представим остаточный член в форме Лагранжа:

$$R_n\left(x\right)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}\left(\xi\right)\left(x-x_0\right)^{n+1},$$

где ξ — некоторая точка между x и x_0.

Из этого представления получается оценка

$$\left|R_n\left(x\right)\right|\le\frac{M}{(n+1)!}h^{n+1}\underset{n}{\to}0 .$$

По предложению 1 функция f разлагается в ряд Тейлора.

3^0. Может случиться, что функция имеет производные всех порядков, но в степенной ряд не разлагается. В качестве примера можно предложить функцию

$$f\left(x\right)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\ne 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

При $x\ne 0$ она имеет производные всех порядков:

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}},\ f''(x)=\left(-\frac{6}{x^4}+\frac{4}{x^6}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},\ldots,$$

$$f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},\ P_n \text{ - многочлен (степени } 3n).$$

В точке $x=0$ функция имеет нулевые производные всех порядков:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}\to 0 \ \textit{при}\ x\to 0\,.$$

Далее применяем индукцию. Допустим, что утверждение верно для всех производных до n - го порядка включительно. Тогда

$$\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}=\frac{\frac{1}{x}P_n\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x^2}}}\to 0\ \textit{при}\ \ x\to 0\,,$$

и $f^{(n+1)}(0)=0.$

Ряд Тейлора оказывается нулевым, и ни для одного $x\neq 0$ значение функции $f(x)$ не равно сумме этого ряда.

§ 7. Разложение основных элементарных функций в ряд Тейлора

1^0. Теорема 1

Имеют место следующие разложения:

I $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ x\in(-\infty,\,+\infty)$,

II $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x\in(-\infty,\,+\infty)$,

III $\sin x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},\ x\in(-\infty,\,+\infty)$,

IV $(1+x)^{\mu}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!}x^n,\ x\in(-1,\,1)$,

V $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\ x\in(-1,\,1]$.

Доказательство.

Мы убедились в том, что функция f может разлагаться только в свой ряд Тейлора, т.е. степенной ряд, коэффициенты которого — коэффициенты Тейлора функции f, а частичные суммы — ее многочлены Тейлора. Коэффициенты и многочлены Тейлора основных функций были вычислены при рассмотрении формулы Тейлора. Повторим вычисления, например, для функции

$$\text{IV.}\ \ f(x)=(1+x)^{\mu}\,.$$

Здесь $f^{(n)}(x) = \mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)(1+x)^{\mu-n}$. Так что для коэффициентов Тейлора получаются выражения

$$a_n = \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!}.$$

I) Пусть $f(x) = e^x$.Возьмем произвольное $h > 0$ и положим $M = e^h$. Тогда

$$\forall x \in (-h,\, h),\ n = 0,1,2,\ldots \ \left| f^{(n)}(x) \right| \le M .$$

Поэтому разложение I) справедливо на интервале $(-h,\, h)$. Поскольку h выбрано произвольно, то разложение справедливо на всей вещественной прямой.
Разложения II),III) выводятся вполне аналогично, при этом можно взять $M = 1$.
Обратимся к формуле IV).
Если $\mu = 0,1,2,\ldots$, ряд IV оказывается конечной суммой. Равенство IV — биномиальная формула Ньютона. В остальных случаях в IV мы видим настоящий ряд с радиусом сходимости $R = 1$. Этот ряд называется биномиальным.
Начнем с частных случаев.
При $\mu = -1$ формула IV принимает вид

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \ ,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

и хорошо нам знакома.
Дифференцируя степенные ряды, приходим к разложениям

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \ ,\ \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n \ ;$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n \ ,\ \frac{1}{(1+x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n \ .$$

Обратимся к общему случаю.
Пусть $x \in (-1,\, 1)$. Запишем остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt \ .$$

Здесь $f(x) = (1+x)^\mu$, $f^{(n+1)}(x) = \mu(\mu-1)\cdots(\mu-n)(1+x)^{\mu-n-1}$ так что

$$R_n(x) = \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n)}{n!} \int_0^x (1+t)^{\mu-n-1} (x-t)^n \, dt \ .$$

Запишем подынтегральную функцию в виде

$$\varphi(t) = (1+t)^{\mu-n-1} (x-t)^n = (1+t)^{\mu-1} \left(\frac{x-t}{1+t} \right)^n .$$

Первый сомножитель — ограниченная функция: $(1+t)^{\mu-1} \le C$. Дробно-линейная функция $\frac{x-t}{1+t}$ монотонна на любом промежутке, входящем в ее область определения, и принимает наибольшее и наименьшее значения на концах промежутка, таковыми значениями оказываются 0 и x.
Получаем оценку

$$\left|\varphi(t)\right| \le C\left|x\right|^n$$

и

$$\left|R_n(x)\right| \le C\frac{\left|\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n)\right|}{n!}\left|x\right|^{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

(стремление к нулю вытекает из сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left|\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n)\right|}{n!}\left|x\right|^{n+1}$).

Формула IV доказана.

Перейдем к логарифмическому ряду V. Разложение получается интегрированием соотношения $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$. Действительно, при $x\in(-1,1)$ получим

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ сходится, то на основе второй теоремы Абеля можно перейти к пределу при $x\to 1-0$ и получить равенство

$$\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

Формула V установлена и для $x=1$.

2⁰. Формула Стирлинга

Теорема 2

Для каждого натурального n найдется число $\theta_n\in(0,1)$, т.ч.

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}$$

$$n!\underset{n\to\infty}{\sim}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Доказательство.

Рассмотрим функцию $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$. Ее производная $f'(x)=\frac{2}{1-x^2}$ разлагается в ряд Тейлора на интервале $(-1,1)$:

$$f'(x)=2\left(1+x^2+x^4+\cdots\right)$$

Интегрируя, получаем равенство

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right),$$

из которого при $x\in(0,1)$ получаем неравенство

$$2x<\ln\frac{1+x}{1-x}<2x\left(1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{3}+\cdots\right)=2x\left(1+\frac{x^2}{3}\frac{1}{1-x^2}\right).$$

В полученном неравенстве положим $x=\dfrac{1}{2n+1}$:

$$\frac{2}{2n+1}<\ln\frac{n+1}{n}<\frac{2}{2n+1}\left(1+\frac{1}{3\left(2n+1\right)^2}\frac{1}{1-\dfrac{1}{\left(2n+1\right)^2}}\right)=\frac{2}{2n+1}\left(1+\frac{1}{12n\left(n+1\right)}\right);$$

$$1<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{12n\left(n+1\right)}.$$

Потенцирование дает неравенство

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}};$$

$$1<\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e}<e^{\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

Рассмотрим теперь последовательность

$$a_n=\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Для этой последовательности

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\left(n+1\right)^{n+\frac{3}{2}}}{e\left(n+1\right)n^{n+\frac{1}{2}}}=\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e}$$

Поэтому

$$1<\frac{a_n}{a_{n+1}}<e^{\frac{1}{12n(n+1)}}=\frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}}.$$

$\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ — положительная убывающая последовательность. Следовательно, она сходится.

Положим $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. Последовательность $a_n e^{-\frac{1}{12n}}$ возрастает и имеет предел a. При любом натуральном n выполняется неравенство

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}}<a<a_n,$$

так что найдется такое $\theta_n\in\left(0,1\right)$, что $a_n=ae^{\frac{\theta_n}{12n}}$, т.е.

$$n!=a\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}e^{\frac{\theta_n}{12n}}=a\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}.$$

Осталось показать, что $a=\sqrt{2\pi}$.
По формуле Валлиса

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n]{} \frac{\pi}{2}.$$

С другой стороны,

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{\left((2n)!!\right)^2}{(2n)!} = \frac{\left(2^n n!\right)^2}{(2n)!} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2^{2n} a^2 n \cdot n^{2n} e^{2n}}{e^{2n} a \cdot \sqrt{2n}\,(2n)^{2n}} = \frac{a\sqrt{n}}{\sqrt{2}},$$

поэтому $\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n]{} \frac{a^2}{4}$.

Стало быть, $\frac{a^2}{4} = \frac{\pi}{2}$, $a^2 = 2\pi$, $a = \sqrt{2\pi}$, что и требовалось.