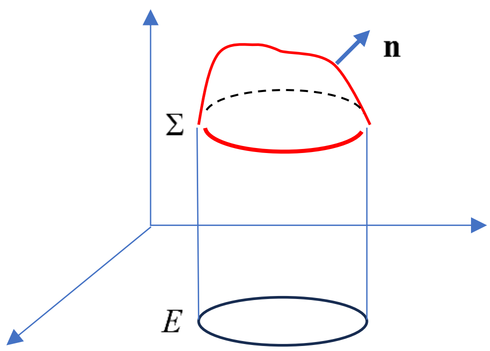
ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ ВТОРОГО РОДА

Пусть Σ — поверхность, заданная явным уравнением

$$\Sigma : z = f(x, y),\ (x, y) \in E,$$

на Σ выбрана верхняя сторона.



$$\iint\limits_{\Sigma} P(x, y, z)\, dx \wedge dy = \iint\limits_{E} P\big(x, y, f(x, y)\big)\, dxdy$$

Если $\Sigma \perp Oxy$, то $\iint\limits_{\Sigma} P(x, y, z)\, dx \wedge dy = 0$.

$$\Sigma : \begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v) \end{cases} \qquad \iint\limits_{\Sigma} P(x, y, z)\, dx \wedge dy = \iint\limits_{E} P\big(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)\big) \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}\, dudv$$

$$\iint\limits_{\Sigma} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iint\limits_{\Omega} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi}{\partial u} & \dfrac{\partial \chi}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} & \dfrac{\partial \psi}{\partial v} & \dfrac{\partial \chi}{\partial v} \end{vmatrix} d\sigma$$

Связь интегралов первого и второго рода

$$\iint\limits_{\Sigma} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iint\limits_{\Sigma} \left(P \cos\lambda + Q \cos\mu + R \cos\nu \right) d\sigma$$

Формула Остроградского-Гаусса

$$\oiint\limits_{\Sigma^+} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)$$

1.

$$\iint\limits_S xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy,$$

S – верхняя сторона поверхности $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1,\ x,y,z\ge 0$

Ответ: 12.

2.

$$\iint\limits_S x^3dy\wedge dz+y^3dz\wedge dx+z^3dx\wedge dy,$$

S – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$

Ответ: $\dfrac{12}{5}\pi a^5$.

3.

$\iint\limits_S z^2dx\wedge dy,\ S$ – внешняя сторона поверхности конуса $x^2+y^2\le z^2,\ 0\le z\le 1$. Ответ: $\dfrac{\pi}{2}$.

4.

$\iint\limits_S \left(x^3+z^3\right)dy\wedge dz,\ S$ – внешняя сторона поверхности конуса $x^2+y^2\le z^2,\ 0\le z\le 1$.

Ответ: $\dfrac{3\pi}{20}$

5.

$$\iint\limits_S \left(x^4+z^4\right)dx\wedge dy,$$

S – внешняя сторона поверхности цилиндра $x^2+y^2=a^2.\ 0\le z\le b.$

Ответ: πa^2b^4.

6.

$$\iint\limits_S \left(x^4+y^4+y^5\right)dz\wedge dx,$$

S – внешняя сторона поверхности цилиндра $x^2+y^2=a^2.\ 0\le z\le b.$

Ответ: $\dfrac{5}{8}\pi a^6b$.

7.

$\iint\limits_S \left(x^5+z^5\right)dy\wedge dz,\ S$ – внешняя сторона поверхности конуса $x^2+y^2\le 4z^2,\ 0\le z\le 1$.

Ответ: $\dfrac{40}{7}\pi$.

8. $\iint\limits_S \left(x^4+z^4\right)dx\wedge dy,\ S$ – внешняя сторона поверхности конуса $x^2+y^2\le z^2,\ 0\le z\le 3$.

Ответ: 486π.

ДЗ Вычислите поверхностные интегралы 2-го рода непосредственно и с помощью формулы Остроградского.

4362. $\iint\limits_S \left(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy \right)$, где S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Ответ: $4\pi a^3$.

4363. $\iint\limits_S \left(f(x)dy \wedge dz + g(y)dz \wedge dx + h(z)dx \wedge dy \right)$, где S — внешняя сторона поверхности параллелепипеда $0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le c$.

Ответ: $\left(\frac{f(a) - f(0)}{a} + \frac{g(b) - g(0)}{b} + \frac{h(c) - h(0)}{c} \right) abc$.

4364. $\iint\limits_S \left((y - z)dy \wedge dz + (z - x)dz \wedge dx + (x - y)dx \wedge dy \right)$, где S — внешняя сторона поверхности конуса $x^2 + y^2 \le z^2,\ 0 \le z \le h$. Ответ: 0.

4366. $\iint\limits_S \left(x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy \right)$, где S — внешняя сторона сферы $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$. Ответ: $\frac{8\pi}{3}(a + b + c)R^3$.

4387. $\iint\limits_S \left(x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy \right)$, где S — внешняя сторона границы куба $0 \le x \le a, 0 \le y \le a, 0 \le z \le a$. Ответ: $3a^4$.

4388. $\iint\limits_S \left(x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + z^3 dx \wedge dy \right)$, где S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Ответ: $\frac{12}{5}\pi a^5$.