Элементы теории поля

$u = u(\mathbf{r}) = u(x, y, z)$ — скалярное поле. ($\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$)

$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}$ — градиент скалярного поля u.

$(\operatorname{grad} u, \mathbf{l})$ — производная поля u по направлению $\mathbf{l}$.

$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ — векторное поле

$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$ — дивергенция векторного поля $\mathbf{a}$.

$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$ — ротор векторного поля $\mathbf{a}$.

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$ — символический вектор набла.

$$\operatorname{grad} u = \nabla u, \quad \operatorname{div} \mathbf{a} = (\nabla, \mathbf{a}), \quad \operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a}.$$

Пример1. $\operatorname{grad} r = \frac{\mathbf{r}}{r}$

Пример 2. $\operatorname{grad} f(r) = f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$

Пример 3. $\operatorname{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{r}) = \mathbf{a}$

Пример 4. (№4412) $\operatorname{grad}|\mathbf{c} \times \mathbf{r}|^2 = 2\mathbf{r}(\mathbf{c}, \mathbf{c}) - 2\mathbf{c}(\mathbf{c}, \mathbf{r})$

Пример 5. $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \mathbf{0}, \qquad \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u$

Пример 6. $\operatorname{div} \mathbf{r} = \mathbf{3}$

$$\operatorname{div} r^5\mathbf{r} = \left(\nabla, r^5\mathbf{r}\right) =$$

$$= \left(\nabla, r^5 \overset{\downarrow}{\mathbf{r}}\right) + \left(\nabla, \overset{\downarrow}{r^5}\, \mathbf{r}\right) = r^5\left(\nabla, \mathbf{r}\right) + \left(\nabla r^5, \mathbf{r}\right) =$$

$$= r^5 \operatorname{div} \mathbf{r} + \left(\operatorname{grad} r^5, \mathbf{r}\right) = 3r^5 + \left(5r^4 \frac{\mathbf{r}}{r}, \mathbf{r}\right) = 8r^5$$

Пример 7 $\operatorname{rot} \mathbf{r} = \mathbf{0}$

Пример 8. $\operatorname{rot} \mathbf{a} \times \mathbf{r} = 2\mathbf{a}$

$$\mathbf{a} \times \left(\mathbf{b} \times \mathbf{c}\right) = \mathbf{b}\left(\mathbf{a}, \mathbf{c}\right) - \mathbf{c}\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}\right)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} \times \mathbf{r} = \nabla \times \left(\mathbf{a} \times \mathbf{r}\right) = \mathbf{a}\left(\nabla, \mathbf{r}\right) - \left(\mathbf{a}, \nabla\right)\mathbf{r} = 3\mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{2a}$$

$$\left(\left(\mathbf{a}, \nabla\right) = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z},\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \mathbf{i}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{j}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}\right)$$

Пример 9. (№4437 а)) $\operatorname{rot} f\left(r\right)\mathbf{c} = \dfrac{f'\left(r\right)}{r}\mathbf{r} \times \mathbf{c}$

$$\operatorname{rot} f\left(r\right)\mathbf{c} = \nabla \times f\left(r\right)\mathbf{c} = \nabla f\left(r\right) \times \mathbf{c} = \operatorname{grad} f\left(r\right) \times \mathbf{c} = \frac{f'\left(r\right)}{r}\mathbf{r} \times \mathbf{c}$$

пример 10 (№4437 б)) $\operatorname{rot} \mathbf{c} \times f\left(r\right)\mathbf{r} = 2f\left(r\right)\mathbf{c} + \dfrac{f'\left(r\right)}{r}\left(\mathbf{c}\left(\mathbf{r}, \mathbf{r}\right) - \mathbf{r}\left(\mathbf{c}, \mathbf{r}\right)\right)$

$$\operatorname{rot} \mathbf{c} \times f\left(r\right)\mathbf{r} = \nabla \times \left(\mathbf{c} \times f\left(r\right)\mathbf{r}\right) = \mathbf{c}\left(\nabla, f\left(r\right)\mathbf{r}\right) - \left(\mathbf{c}, \nabla\right) f\left(r\right)\mathbf{r} =$$

$$= \mathbf{c}\left(3f\left(r\right) + \frac{f'\left(r\right)}{r}\left(\mathbf{r}, \mathbf{r}\right)\right) - \left(\mathbf{c}f\left(r\right) + \left(\mathbf{c}, \frac{f'\left(r\right)}{r}\mathbf{r}\right)\mathbf{r}\right) =$$

$$= 2f\left(r\right)\mathbf{c} + \frac{f'\left(r\right)}{r}\left(\mathbf{c}\left(\mathbf{r}, \mathbf{r}\right) - \mathbf{r}\left(\mathbf{c}, \mathbf{r}\right)\right)$$

Домашнее задание.

4401. 1. Найдите модуль и направление поля $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ в точках а) $O\left(0,0,0\right)$, б) $A\left(1,1,1\right)$, в) $B\left(2,0,1\right)$. В какой точке градиент поля равен нулю.

Ответ:: а) $\operatorname{grad} u\left(O\right) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k},\ \left|\operatorname{grad} u\left(O\right)\right| = 7,\ \cos\alpha = \dfrac{3}{7},\ \cos\beta = -\dfrac{2}{7},\ \cos\gamma = -\dfrac{6}{7}$;

а) $\operatorname{grad} u\left(A\right) = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j},\ \left|\operatorname{grad} u\left(A\right)\right| = 3\sqrt{5},\ \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\beta = -\dfrac{2\sqrt{5}}{7},\ \cos\gamma = 0$;

в) $\operatorname{grad} u(A)=7\mathbf{i},\ |\operatorname{grad} u(A)|=7,\ \cos\alpha=1,\ \cos\beta=0,\ \cos\gamma=0$, $\operatorname{grad} u=0$ в точке $(-2,1,1)$.

4406. Постройте поверхности уровня и поверхности равного модуля градиента поля

$$u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Найдите $\inf u,\ \sup u,\ \inf|\operatorname{grad} u|,\ \sup|\operatorname{grad} u|$ в области $1<z<2$.

Ответ: поверхности уровня — конусы, поверхности равного модуля градиента — торы, $\inf u=0,\ \sup u=1,\ \inf|\operatorname{grad} u|=0,\ \sup|\operatorname{grad} u|=\frac{1}{2}$.

4409. Вычислите: $\operatorname{grad} r,\ \operatorname{grad} r^2,\ \operatorname{grad}\frac{1}{r}$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Ответ: $\frac{\mathbf{r}}{r},\ 2\mathbf{r},\ -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$.

4410. Найдите $\operatorname{grad} f(r)$. Ответ: $f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$.

4411. Найдите $\operatorname{grad}(\mathbf{c},\mathbf{r})$, $\mathbf{c}$ — постоянный вектор, а $\mathbf{r}$ — радиус-вектор из начала координат.
Ответ: $\mathbf{c}$.

4417. Найдите производную поля $u=\frac{1}{r}$ в направлении $\mathbf{l}(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. В каком случае эта производная равна 0?. Ответ: $\frac{\partial u}{\partial l}=-\frac{\cos(l,\mathbf{r})}{r^2}$, $\frac{\partial u}{\partial l}=0$, если $l\perp\mathbf{r}$.

4426. Найдите $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))$. В каком случае $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))=0$?

Ответ: $f'(r)+\frac{2}{r}f'(r)$; $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))=0$, если $f(r)=c+\frac{c_1}{r}$.

4427. Вычислите $\operatorname{div}\mathbf{r},\ \operatorname{div}\frac{\mathbf{r}}{r}$. Ответ: $3,\ \frac{2}{r}$.

4428. Вычислите $\operatorname{div}(f(r)\mathbf{c})$, где $\mathbf{c}$ —. постоянный вектор. Ответ: $\frac{f'(r)}{r}(\mathbf{c},\mathbf{r})$.

4429. Вычислите $\operatorname{div}(f(r)\mathbf{r})$. В каком случае $\operatorname{div}(f(r)\mathbf{r})=0$?

Ответ: $3f(r)+rf'(r),\ f(r)=\frac{c}{r^3}$

4436. 1. Найдите $\operatorname{rot}\mathbf{r},\ \operatorname{rot}(f(r)\mathbf{r})$. Ответ: $0;0$