

Собственные интегралы, зависящие от параметра

Пусть f — функция на $\Delta \times Y$, Δ — промежуток, при каждом $y \in Y$ функция $f(\cdot, y)$ интегрируема по промежутку Δ (в собственном смысле).

Положим
$$I : I(y) = \int_{\Delta} f(x, y) dx.$$

Функция I называется интегралом, зависящим от параметра.

Теорема 1. f непрерывна на прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$.

Тогда интеграл, зависящий от параметра, $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ непрерывен на отрезке $[c, d]$.

Теорема 2.

Пусть f — функция на $[a, b] \times Y$, y_0 — предельная точка множества Y ,

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad f(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \varphi(x).$$

Тогда
$$I(y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Теорема 3.

f непрерывна на прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$, $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$.

Тогда
$$\int_c^d I(y) dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy, \quad \text{т.е.} \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Теорема 4. Правило Лейбница

$f, \frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$.

Тогда функция I непрерывно дифференцируема на отрезке $[c, d]$ и

$$\forall y \in [c, d] \quad I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

Пример 1 (№3711)

$$F(y) = \int_0^1 \operatorname{sgn}(x-y) dx, \quad \operatorname{sgn} u = \begin{cases} -1, & u < 0 \\ 0, & u = 0 \\ 1, & u > 0 \end{cases} \quad \text{Ответ: } F(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \leq 0 \\ 1-2y, & \text{если } 0 \leq y \leq 1 \\ -1, & \text{если } y \geq 1 \end{cases}$$

Пример 2.(3713 б))

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + \alpha^2} dx$$

Ответ: 1

Пример 3 3718 б) Найдите производную функции

$$F(\alpha) = \int_{a+\alpha}^{b+\alpha} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

Пример 4 (3733) Вычислите интеграл $I(a) = \int_0^\pi \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx$.

$$\text{Ответ: } I(a) = \begin{cases} 0, & \text{если } |a| \leq 1 \\ \pi \ln a^2 & \text{если } |a| > 1 \end{cases}$$

Пример 5 (3736) Пользуясь формулой

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2 y^2},$$

вычислите интеграл

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad \text{Ответ: } \frac{\pi}{2} \ln(\sqrt{2}+1)$$

Пример 6 (3737 Применяя интегрирование под знаком интеграла, вычислите интеграл

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (b > a > 0) \quad \text{Ответ: } \ln \frac{b+1}{a+1}$$

Пример 7(3738 а)) Вычислите интеграл

$$\int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (b > a > 0) \quad \text{Ответ: } \operatorname{arctg}(b+1) - \operatorname{arctg}(a+1)$$

Домашнее задание. 3713 а). Найдите $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_\alpha^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$. Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

3718 а). Найдите $F'(\alpha)$, если $F(\alpha) = \int_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} e^{\alpha \sqrt{1-x^2}} dx$.

Ответ: $F'(a) = -\sin \alpha e^{\alpha|\sin \alpha|} - \cos \alpha e^{\alpha|\cos \alpha|} + \int_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} \sqrt{1-x^2} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}} dx$

3718 б). $F(\alpha) = \int_{a+\alpha}^{b+\alpha} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$. Ответ: $\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b+\alpha}\right) \sin \alpha (b+\alpha) - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{a+\alpha}\right) \sin \alpha (a+\alpha)$.

Применяя дифференцирование по параметру, вычислите интегралы:

3732. $\int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx$. Ответ: $\pi \ln \frac{|a|+|b|}{2}$.

3738 б). Вычислите интеграл

$$\int_0^1 \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (b > a > 0). \text{ Ответ: } \frac{1}{2} \ln \frac{b^2 + 2b + 2}{a^2 + 2a + 2}.$$