

Собственные интегралы, зависящие от параметра

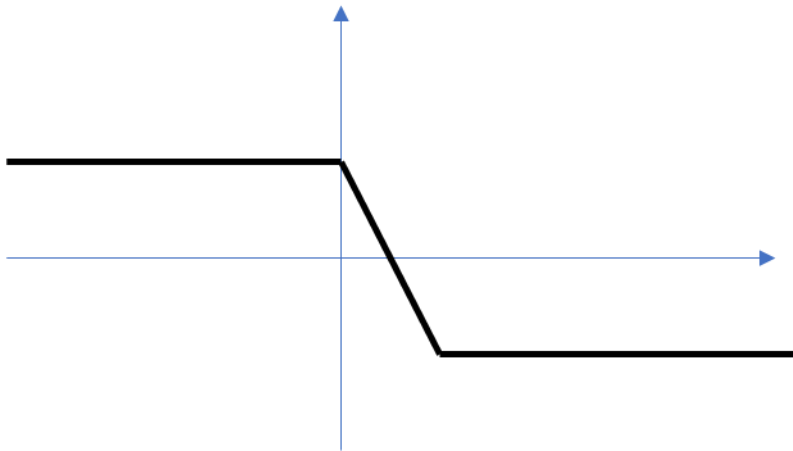
Пример 1 (№3711)

$$F(y) = \int_0^1 \operatorname{sgn}(x-y) dx, \quad \operatorname{sgn} u = \begin{cases} -1, & u < 0 \\ 0, & u = 0, \\ 1, & u > 0 \end{cases}$$

$$F(y) = \int_0^1 1 dx = 1, \text{ если } y \leq 0,$$

$$F(y) = \int_0^1 (-1) dx = -1, \text{ если } y \geq 1,$$

$$F(y) = \int_0^y (-1) dx + \int_y^1 1 dx = -y + 1 - y = 1 - 2y, \text{ если } 0 < y < 1$$



F непрерывна на всей вещественной прямой.

Пример 2.(3713 б))

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + \alpha^2} dx = \int_{-1}^1 |x| dx = 2 \int_0^1 x dx = 1$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + \alpha^2} dx = 2 \left(\frac{x}{2} \sqrt{x^2 + \alpha^2} + \frac{\alpha^2}{2} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + \alpha^2} \right) \right) \Big|_0^1 = \sqrt{1 + \alpha^2} + \alpha^2 \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \alpha^2}}{|\alpha|}$$

Пример 3 3718 б)

$$F(\alpha) = \int_{a+\alpha}^{b+\alpha} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= \int_{a+\alpha}^{b+\alpha} \cos \alpha x dx + \frac{\sin \alpha (b+\alpha)}{b+\alpha} - \frac{\sin \alpha (a+\alpha)}{a+\alpha} = \\ &= \frac{\sin \alpha (b+\alpha)}{\alpha} - \frac{\sin \alpha (a+\alpha)}{\alpha} + \frac{\sin \alpha (b+\alpha)}{b+\alpha} - \frac{\sin \alpha (a+\alpha)}{a+\alpha} \end{aligned}$$

Пример 4 (3733)

$$I(a) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx$$

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^{\pi} \frac{2a - 2 \cos x}{1 - 2a \cos x + a^2} dx = \left[u = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right] = 4 \int_0^{+\infty} \frac{a - \frac{1-u^2}{1+u^2}}{1+a^2 - 2a \frac{1-u^2}{1+u^2}} \frac{du}{1+u^2} = \\ &= 4 \int_0^{+\infty} \frac{(a-1) + (a+1)u^2}{(1-a)^2 + (1+a)^2 u^2} \frac{du}{1+u^2} = \frac{2}{a} \int_0^{+\infty} \left(\frac{a^2 - 1}{(1-a)^2 + (1+a)^2 u^2} + \frac{1}{1+u^2} \right) du \end{aligned}$$

Предположим сначала, что $-1 < a < 1$, тогда

$$\int_0^{+\infty} \frac{a^2 - 1}{(1-a)^2 + (1+a)^2 u^2} du = \left[u = \frac{1-a}{1+a} v \right] = - \int_0^{+\infty} \frac{dv}{v^2 + 1} = - \frac{\pi}{2}, \text{ и } I'(a) = 0.$$

Поскольку $I(0) = 0$, то $I(a) = 0$ при $a \in (-1, 1)$.

Если $|a| > 1$, положим $b = 1/a$, $|b| < 1$.

$$\begin{aligned} I(a) &= I(1/b) = \int_0^{\pi} \ln \left(1 - \frac{2}{b} \cos x + \frac{1}{b^2} \right) dx = \\ &= \int_0^{\pi} \ln \left(\frac{b^2 - 2b \cos x + 1}{b^2} \right) dx = I(b) - \pi \ln b^2 = 0 + \pi \ln a^2 = \pi \ln a^2 \end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned} I(1) &= \int_0^{\pi} \ln(2 - 2 \cos x) dx = [x = \pi - y] = \int_0^{\pi} \ln(2 + 2 \cos y) dy = I(-1); \\ 2I(1) &= I(1) + I(-1) = \int_0^{\pi} (\ln(2 - 2 \cos x) + \ln(2 + 2 \cos x)) dx = \\ &= \int_0^{\pi} \ln(4 - 4 \cos^2 x) dx = \int_0^{\pi} \ln(4 \sin^2 x) dx = \int_0^{\pi} \ln(2 - 2 \cos 2x) dx = I(1) \end{aligned}$$

$$2I(1) = I(1), \quad I(1) = 0$$

(Можно организовать вычисление и несколько иначе. Сохраним первый этап, $I(a) = 0$ при $a \in (-1, 1)$. Установим непрерывность функции I . При $a > 1$ получим

$$I'(a) = \frac{2\pi}{a}, \quad I(a) = \pi \ln a^2$$

Пример 5 (3736) Пользуясь формулой

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2 y^2},$$

вычислите интеграл

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ & \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{dy}{1+x^2 y^2} \right) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^2 y^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right) dy = \\ & = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+y^2 \sin^2 t} \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\cos^2 t + (y^2 + 1) \sin^2 t} \right) dy = \\ & = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+(y^2+1) \operatorname{tg}^2 t} \frac{dt}{\cos^2 t} \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+(y^2+1)u^2} \right) dy = \\ & = \int_0^1 \frac{\pi}{2\sqrt{y^2+1}} dy = \frac{\pi}{2} \ln \left(y + \sqrt{y^2+1} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \ln(\sqrt{2}+1) \end{aligned}$$

Пример 6 (3737 Применяя интегрирование под знаком интеграла, вычислите интеграл

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (b > a > 0)$$

Запишем равенство

$$\int_0^1 x^y dx = \frac{x^{y+1}}{y+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{y+1}$$

и проинтегрируем его по отрезку $[a, b]$:

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln \frac{b+1}{a+1}$$

Пример 7(3738 а)) Вычислите интеграл

$$\int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (b > a > 0)$$

$$\int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) x^y dx = \left[z = \ln \frac{1}{x}, x = e^{-z} \right] = \int_0^{+\infty} e^{-z(y+1)} \sin z dz =$$

$$= - \frac{e^{-z(y+1)} \cos z + (y+1) e^{-z(y+1)} \sin z}{(y+1)^2 + 1} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{(y+1)^2 + 1}$$

Интегрируя это равенство, получаем

$$\int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_a^b \frac{dy}{(y+1)^2 + 1} = \operatorname{arctg}(y+1) \Big|_a^b = \operatorname{arctg}(b+1) - \operatorname{arctg}(a+1)$$