ФОРМУЛА ГРИНА

Вычислите криволинейные интегралы по замкнутым путям непосредственно и с помощью формулы Грина.

4297. $\oint\limits_{\Gamma}(x+y)^2\,dx-\left(x^2+y^2\right)dy$, где Γ — пробегаемый в положительном направлении контур треугольника с вершинами $A(1,1), B(3,2), C(2,5)$.

Ответ: $\left(-\dfrac{140}{3}\right)$

4298. $\oint\limits_{\Gamma}xy^2dx-x^2ydy$, где Γ — окружность $x^2+y^2=a^2$, пробегаемая в положительном направлении.

Ответ: $\dfrac{\pi a^4}{2}$

С помощью криволинейных интегралов вычислите площади фигур, ограниченных следующими кривыми:

4309. $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t\ \left(0\le t\le 2\pi\right)$ (астроида).

Ответ: $\dfrac{3}{8}\pi ab$

4312. $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$ (лемниската).

Ответ: a^2.

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

1. $z=f(x,y),\ (x,y)\in E$

$$S=\iint\limits_E\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

2. $\begin{cases} x=\varphi(x,y), \\ y=\psi(u,v),\ (u,v)\in D \\ z=\chi(u,v), \end{cases}$

$$S=\iint_D \sqrt{EG-F^2}\,dudv;$$

$$E=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)^2,$$

$$E=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}+\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial v}$$

4036. Найдите площадь части поверхности $az=xy$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=a^2$.

Ответ: $\frac{2}{3}\pi a^2\left(2\sqrt{2}-1\right)$

4038. Найдите площадь части сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, заключенной внутри цилиндра $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b\le a)$.

Ответ: $8a^2\arcsin\frac{b}{a}$

4041. Найдите площадь части поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=2x$.

Ответ: $\pi\sqrt{2}$

4045 б) Найдите площадь части поверхности $\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}+z=1$, отсекаемой плоскостью $z=0$.

Ответ: $\frac{\pi}{6}\left(3\sqrt{10}+\ln\left(3+\sqrt{10}\right)\right)$

4045 г) Найдите площадь части поверхности $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=2z$, вырезанной поверхностью $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Ответ: $\frac{4}{3}ab\left(2\sqrt{2}-1\right)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b}}$

ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ I РОДА

$$\iint_S F\,d\sigma=\iint_E F\left(x,y,f\left(x,y\right)\right)\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

$$\iint\limits_S F d\sigma = \iint\limits_D F\left(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)\right)\sqrt{EG-F^2}\,dudv;$$

4343. Вычислите $\iint\limits_S (x+y+z)\,d\sigma$, где S — поверхность $x^2+y^2+z^2=a^2, z\geq 0$.

Ответ: πa^2

4350. Вычислите $\iint\limits_S (xy+yz+zx)\,d\sigma$, где S — часть конической поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вырезанная поверхностью $x^2+y^2=2ax$.

Ответ: $\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$

ДЗ 4297, 4300; 4308, 4311

4037, 4042, 4043;

4341, 4344, 4345