

ФОРМУЛА ГРИНА

4297, 4298; 4309, 4312

4297. Вычислите криволинейный интеграл

$$I = \oint_K (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy,$$

Где K — пробегаемый в положительном направлении контур треугольника ABC с вершинами $A(1,1); B(3,2); C(2,5)$.

По формуле Грина

$$I = \iint_E (-4x - 2y) dx dy,$$

где E — треугольник ABC .

Выполняя замену переменных по формулам $x = u + 1, y = v + 1$, получаем

$$I = \iint_{E'} (-4u - 2v - 6) du dv,$$

Где E' — треугольник с вершинами $A'(0,0), B'(2,1), C'(1,4)$.

Выполняя замену переменных по формулам

$$\begin{cases} s = u - 2v \\ t = 4u - v \end{cases} \quad \begin{cases} u = \frac{2t - s}{7} \\ v = \frac{t - 4s}{7} \end{cases} \quad J = \frac{1}{7},$$

получаем

$$I = \iint_{E''} \left(-4 \frac{2t-s}{7} - 2 \frac{t-4s}{7} - 6 \right) \frac{1}{7} dt ds = \iint_{E''} \left(\frac{-10t + 12s}{7} - 6 \right) \frac{1}{7} dt ds,$$

Где E'' — треугольник с вершинами $A''(0,0), B''(0,7), C''(-7,0)$.

Замена $s = -7\xi, t = 7\eta$ дает

$$I = 7 \iint_{\xi, \eta \geq 0; \xi + \eta \leq 1} (-10\xi - 12\eta - 6) d\xi d\eta = 7 \left(\frac{-22}{2 \cdot 3} - 3 \right) = 7 \left(\frac{-11}{3} - 3 \right) = -\frac{140}{3}.$$

Проведем прямые вычисления

$$y = \frac{1}{2}(x+1), x = 2y-1$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy &= \int_{\Gamma_1} (x+y)^2 2dy - (x^2 + y^2) dy = \int_1^2 (x^2 + 4xy + y^2) dy = \\ &= \int_1^2 ((2y-1)^2 + 4(2y-1)y + y^2) dy = \int_1^2 (13y^2 - 8y + 1) dy = [y = u + 1] = \\ &= \int_0^1 (13(u+1)^2 - 8(u+1) + 1) dy = \int_0^1 (13u^2 + 18u + 6) dy = \frac{13}{3} + 9 + 6 = \frac{58}{3} \end{aligned}$$

$$y = -3x + 11$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy &= \int_{\Gamma_2} ((x+y)^2 + 3(x^2 + y^2)) dx = \int_{\Gamma_2} (4x^2 + 2xy + 4y^2) dx = \\ &= \int_{\Gamma_2} (4x^2 + 2x(-3x+11) + 4(-3x+11)^2) dx = -\int_2^3 (34x^2 - 242x + 484) dx = [x = u + 2] = \\ &= -\int_0^1 (34(u+2)^2 - 242(u+2) + 484) du = -\int_0^1 (34u^2 - 106u + 136) du = -\left(\frac{34}{3} - 53 + 136\right) = -\frac{283}{3} \end{aligned}$$

$$y = 4x - 3$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy &= \int_{\Gamma_3} ((x+y)^2 - 4(x^2 + y^2)) dx = \int_{\Gamma_3} (-3x^2 + 2xy - 3y^2) dx = \\ &= -\int_1^2 (-3x^2 + 2x(4x-3) - 3(4x-3)^2) dx = -\int_1^2 (-43x^2 + 66x - 27) dx = [x = u + 1] = \\ &= -\int_0^1 (-43(u+1)^2 + 66(u+1) - 27) dx = -\int_0^1 (-43u^2 - 20u - 4) dx = -\left(-\frac{43}{3} - 10 - 4\right) = \frac{85}{3} \end{aligned}$$

$$I = \frac{58}{3} - \frac{283}{3} + \frac{85}{3} = \frac{143 - 283}{3} = -\frac{140}{3}$$

С помощью криволинейных интегралов вычислите площади фигур, ограниченных следующими кривыми:

4309. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) (астроида).

$$x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$$

$$\begin{aligned} S &= 2 \int x dy - y dx = 2 \int_0^{\pi/2} 3a^2 (\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t) dt = \\ &= 6a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^2 t dt = 6a^2 \frac{1}{4!!} \frac{\pi}{2} = \frac{3}{8} \pi a^2 \end{aligned}$$

$$4312 \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$$

$$y = x \operatorname{tg} \varphi$$

$$\frac{x^4}{\cos^4 \varphi} = a^2 x^2 \frac{\cos 2\varphi}{\cos^2 \varphi}$$

$$x^2 = a^2 \cos 2\varphi \cos^2 \varphi$$

$$x = a \sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi, y = a \sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi$$

$$dx = a \left(-\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \cos \varphi - \sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi \right)$$

$$dy = a \left(-\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \sin \varphi + \sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi \right)$$

$$x dy - y dx = a^2 \cos 2\varphi d\varphi$$

$$S = a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{2} \sin 2\varphi \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = a^2$$

4036. Найдите площадь части поверхности $az = xy$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

$$az = xy, x^2 + y^2 \leq a^2; z = \frac{xy}{a}$$

$$\begin{aligned} S &= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{1 + \frac{y^2 + x^2}{a^2}} dx dy = a^2 \iint_{\substack{0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1}} \sqrt{1 + r^2} r dr = \\ &= 2\pi a^2 \frac{1}{3} (1 + r^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2\pi a^2}{3} (2\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

4038. Найдите площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, заключенной внутри цилиндра

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b \leq a).$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

$$S = 2 \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = 2a \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy =$$

$$= 2a \iint_{r^2 \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right) \leq 1} \frac{r dr d\varphi}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 8a \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}}}} \frac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} =$$

$$= 8a \int_0^{\pi/2} d\varphi \left(-\sqrt{a^2 - r^2} \right) \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}}}} = 8a \int_0^{\pi/2} \left(a - \sqrt{a^2 - \frac{1}{\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}}} \right) d\varphi =$$

$$= 8a \int_0^{\pi/2} \left(a - \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi + \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \varphi - 1}{\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}}} \right) d\varphi = 8a \int_0^{\pi/2} \left(a - \sqrt{\frac{\frac{a^2}{b^2} \sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi}{\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}}} \right) d\varphi =$$

$$= 8a \left(\frac{\pi}{2} a - \int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{\frac{\frac{a^2}{b^2} - 1}{\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}}} \right) \sin \varphi d\varphi \right) = 8a \left(\frac{\pi}{2} a - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2} + \frac{1-u^2}{b^2}}} \right) =$$

$$= 8a \left(\frac{\pi}{2} a - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \int_0^1 \frac{ab du}{\sqrt{a^2 - u^2 (a^2 - b^2)}} \right) = 8a^2 \left(\frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{ab du}{\sqrt{a^2 - b^2 - u^2}} \right) = 8a^2 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{u \sqrt{a^2 - b^2}}{a} \Big|_0^1 \right) =$$

$$= 8a^2 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right) = 8a^2 \arccos \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = 8a^2 \arcsin \frac{b}{a}$$

4045 б) Найдите площадь части поверхности $(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} + z = 1$, отсекаемой плоскостью $z = 0$.

$$z = 1 - (x^2 + y^2)^{3/2}$$

$$\begin{aligned}
S &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1+9(x^2+y^2)} x^2 + 9(x^2+y^2) y^2 dx dy = \\
&= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1+9(x^2+y^2)^2} dx dy = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+9r^4} r dr = \\
&= \pi \int_0^1 \sqrt{1+9u^2} du = \frac{\pi}{3} \int_0^3 \sqrt{1+v^2} dv = \frac{\pi}{6} (3\sqrt{10} + \ln(3+\sqrt{10}))
\end{aligned}$$

4045 г) Найдите площадь части поверхности $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z$, вырезанной поверхностью

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (z \geq 0).$$

$$\begin{aligned}
z &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} \right), z \geq 0 \\
d\sigma &= \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} dx dy \\
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{x}{a}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S &= \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 1, \\ \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} \geq 0}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} dx dy = 4 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{b}{a}} ab \int_0^1 r \sqrt{1+r^2} dr = \\
&= 4ab \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{1}{3} (1+r^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{4 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{b}{a}}}{3} ab (2\sqrt{2} - 1)
\end{aligned}$$

4342. Вычислите интеграл

$$\iint_S z d\sigma,$$

где S — часть поверхности $x^2 + z^2 = 2az$ ($a > 0$), вырезанная поверхностью $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$x^2 + z^2 = 2az,$$

$$x^2 + y^2 = z^2, x^2 = z^2 - y^2$$

$$2z^2 - y^2 = 2az, 2\left(z - \frac{a}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{a^2}{2}$$

На плоскость Oyz поверхность S проектируется в фигуру E , ограниченную гиперболой

$$2z^2 - y^2 = 2az \text{ и отрезком } z = 2a.$$

$$x^2 + z^2 = 2az, x = \pm\sqrt{2az - x^2}, d\sigma = \sqrt{1 + \frac{(a-z)^2}{2az - x^2}} dydz = \frac{adydz}{\sqrt{2az - z^2}}.$$

$$\begin{aligned} \iint_S zd\sigma &= 2a \iint_E \sqrt{\frac{z}{2a-z}} dydz = 2a \int_a^{2a} \sqrt{\frac{z}{2a-z}} dz \int_{-\sqrt{2z^2-2az}}^{\sqrt{2z^2-2az}} dy = \\ &= 4a \int_a^{2a} \sqrt{\frac{z}{2a-z}} \sqrt{2z^2-2az} dz = 4\sqrt{2}a \int_a^{2a} z \sqrt{\frac{z-a}{2a-z}} dz = [u = z-a] = \\ &= 4\sqrt{2}a \int_0^a (a+u) \sqrt{\frac{u}{a-u}} du = [u = av] = 4\sqrt{2}a^3 \int_0^1 (1+v) \sqrt{\frac{v}{1-v}} dv = \\ &= [u = \sin^2 t] = 8\sqrt{2}a^3 \int_0^{\pi/2} (1+\sin^2 t) \frac{\sin t}{\cos t} \sin t \cos t dt = 8\sqrt{2}a^3 \int_0^{\pi/2} (1+\sin^2 t) \sin^2 t dt = \\ &= 8\sqrt{2}a^3 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{16} \right) = \frac{7\sqrt{2}}{2} \pi a^3. \end{aligned}$$