Занятие 9 продолжение.

Формула Стокса

$$\oint\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{S} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy =$$

$$= \iint\limits_{S} \begin{vmatrix} \cos\lambda & \cos\mu & \cos\nu \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Вычислите интегралы с помощью формулы Стокса и непосредственно.

1. $\oint\limits_{\Gamma: x^2+y^2+z^2=3,\ x+y+z=2} \left(y^2 - z^2\right) dx + \left(z^2 - x^2\right) dy + \left(x^2 - y^2\right) dz$. Ответ: $-\dfrac{40}{3\sqrt{3}}\pi$.

2.

$\oint\limits_{\Gamma} (x+z)dx + (x-y)dy + xdz,$

Γ - эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ z = c,$ ориентированный положительно относительно вектора $(0,0,1)$. Ответ: πab.

3.

$\int\limits_{\Gamma} xdx + (x+y)dy + (x+y+z)dz,$

$x = a\sin t, y = a\cos t, z = a(\sin t + \cos t), t \in [0, 2\pi].$ Ответ: $-\pi a^2$.

4.

$\int\limits_{\Gamma} ydx + zdy + xdz,$

Γ − окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0.$ Ответ: $-\sqrt{3}\pi a^2$.

5.

$\int\limits_{\Gamma} \left(y^2 - z^2\right) dx + \left(z^2 - x^2\right) dy + \left(x^2 - y^2\right) dz,\ \Gamma$ — кривая пересечения поверхности куба $|x|,|y|,|z| \le a$ плоскостью $x + y + z = \dfrac{3a}{2}$. Ответ: $-\dfrac{27}{4}a^3$.

Применяя формулу Стокса, вычислите интегралы. Результат проверьте прямым вычислением.

4370. $\oint\limits_C (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$, где C — эллипс,

$x = a\sin^2 t,\ y = 2a\sin t\cos t,\ z = a\cos^2 t,\ (0 \le t \le \pi)$, пробегаемый в направлении возрастания параметра. Ответ: 0.

4371. $\oint\limits_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$, где C — эллипс,

$x^2 + y^2 = a^2,\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{h} = 1\,(a, h > 0)$, пробегаемый в направлении против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox. Ответ: $(-2\pi a(a+h))$.

4373. . $\oint\limits_C (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz$, где C — сечение поверхности куба ,

$0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a,\ 0 \le z \le a$ плоскостью $x + y + z = \dfrac{3}{2}a$, пробегаемое в направлении против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox. Ответ: $\left(-\dfrac{9}{2}a^3\right)$.