Занятие 9 продолжение.

Вычислите интегралы с помощью формулы Стокса и непосредственно.

1. $I = \oint\limits_{\Gamma: x^2+y^2+z^2=3,\ x+y+z=2} \left(y^2-z^2\right)dx + \left(z^2-x^2\right)dy + \left(x^2-y^2\right)dz$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3 \\ x+y+z=2 \end{cases} \quad \begin{cases} z=2-x-y \\ x^2+y^2+\left(2-x-y\right)^2=3 \end{cases}$$

$$2x^2+2y^2+4-4x-4y+2xy=$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(u-v\right) \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(u+v\right) \end{cases} \qquad \begin{aligned} &2u^2+2v^2+u^2-v^2-4\sqrt{2}u+1=0 \\ &3u^2+v^2-4\sqrt{2}u+1=0 \\ &3\left(u-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2+v^2=\frac{5}{3} \end{aligned} \qquad \begin{cases} u=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}+\dfrac{\sqrt{5}}{3}\cos t \\ v=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\sin t \end{cases}$$

Решение_1.

$$I = \oint\limits_{\Gamma: x^2+y^2+z^2=3,\ x+y+z=2} \left(y^2-z^2\right)dx + \left(z^2-x^2\right)dy + \left(x^2-y^2\right)dz = \left[dz=-dx-dy\right]=$$

$$=\oint\limits_{\Gamma}\left(y^2-z^2\right)dx+\left(z^2-x^2\right)dy-\left(x^2-y^2\right)\left(dx+dy\right)=$$

$$=\oint\limits_{\Gamma}\left(-x^2+2y^2-z^2\right)dx+\left(z^2-2x^2+y^2\right)dy=$$

$$=\oint\limits_{\Gamma}\left(-x^2+2y^2-3+x^2+y^2\right)dx+\left(3-x^2-y^2-2x^2+y^2\right)dy=$$

$$=\oint\limits_{\Gamma}\left(3y^2-3\right)dx+\left(3-3x^2\right)dy=3\oint\limits_{\Gamma}\left(y^2dx-x^2dy\right)$$

$$=3\oint\limits_{\Gamma_1}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(u+v\right)^2\left(du-dv\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(u-v\right)^2\left(du+dv\right)\right)=$$

$$=\frac{3}{2\sqrt{2}}\oint\limits_{\Gamma_1}\left(\left(u^2+v^2\right)\left(-2dv\right)+2uv2du\right)=\frac{3}{2\sqrt{2}}\oint\limits_{\Gamma_1}\left(-2u^2dv+4uvdu\right)=$$

$$=\frac{3}{2\sqrt{2}}\int\limits_0^{2\pi}\left(-2\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}\cos t\right)^2\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\cos t+4\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}\cos t\right)\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\sin t\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\cos t\right)dt=$$

$$=-4\frac{3}{2\sqrt{2}}\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\sqrt{5}}{3}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\pi=-\frac{40}{3\sqrt{3}}\pi.$$

Решение_2.

$$I=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2\end{vmatrix}d\sigma=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\,d\sigma=$$

$$=-\frac{8}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}d\sigma=-8\iint\limits_{E}dxdy=-8\frac{\sqrt{5}}{3}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\pi=-\frac{40}{3\sqrt{3}}\pi$$

2.

$I=\oint\limits_{\Gamma}(x+z)\,dx+(x-y)\,dy+xdz$, Γ - эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=c,$
ориентированный положительно относительно вектора $(0,0,1)$.

Решение_1.

$$\oint\limits_{\Gamma}(x+z)\,dx+(x-y)\,dy+xdz=\begin{bmatrix}x=a\cos t\\ y=b\sin t\\ z=c\end{bmatrix}=$$

$$=\int\limits_{0}^{2p}\big((a\cos t+c)(-a\sin t)+(a\cos t-b\sin t)b\cos t\big)dt=\pi ab$$

Решение_2.

$$I=\oint\limits_{\Gamma}(x+z)\,dx+(x-y)\,dy+xdz=\iint\limits_{\Sigma:z=c,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x+z & x-y & x\end{vmatrix}=\iint\limits_{\Sigma}d\sigma=\pi ab$$

3.

$$I=\int\limits_{\Gamma}xdx+(x+y)\,dy+(x+y+z)\,dz=$$

$$x=a\sin t,\ y=a\cos t,\ z=a(\sin t+\cos t),\ t\in[0,2\pi]$$

Решение_1.

$$I=\int_\Gamma xdx+(x+y)dy+(x+y+z)dz=$$

$$=\int_\Gamma xdy+(x+y)dz=\int_\Gamma xdy+zdz=\int_\Gamma xdy=\int_0^{2\pi} a\sin t(-a\cos t)dt=-\pi a^2$$

Решение_2.

$z=x+y,$

$$I=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma:z=x+y,x^2+y^2\le a^2}\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & x+y & x+y+z\end{vmatrix}d\sigma=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_\Sigma(1-1-1)d\sigma=-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_\Sigma d\sigma=-\iint\limits_E dxdy=-\pi a^2.$$

4.

$$I=\int_\Gamma ydx+zdy+xdz=\pi\sqrt{3}a^2,$$

Γ – окружность $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x+y+z=0$

Решение_1.

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ x+y+z=0,\end{cases}\ \begin{cases}z=-x-y,\\ x^2+y^2+z^2=a^2,\end{cases}$$

$$x^2+y^2+(x+y)^2=a^2,\ 2x^2+2y^2+2xy=a^2,$$

$$\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{2}}(u-v),\\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(u+v),\end{cases}$$

$$2u^2+2v^2+u^2-v^2=a^2,\ 3u^2+v^2=a^2.$$

$$\begin{cases}u=\frac{a}{\sqrt{3}}\cos t,\\ v=a\sin t,\end{cases}\ \begin{cases}x=\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t-\sin t\right),\\ y=\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t+\sin t\right),\\ z=-\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}\cos t\end{cases}\ \begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right),\\ y=\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right),\\ z=-\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}\cos t\end{cases}$$

$$I=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(\left(\frac{1}{\sqrt3}\cos t+\sin t\right)\left(-\frac{1}{\sqrt3}\sin t-\cos t\right)-\frac{2}{\sqrt3}\cos t\left(-\frac{1}{\sqrt3}\sin t+\cos t\right)+\left(\frac{1}{\sqrt3}\cos t-\sin t\right)\frac{2}{\sqrt3}\sin t\right)dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\pi\left(-\frac{2}{\sqrt3}-\frac{2}{\sqrt3}-\frac{2}{\sqrt3}\right)=-\sqrt3 a^2\pi$$

Решение_2.

$$I=\int_\Gamma ydx+zdy+xdz=\frac{1}{\sqrt3}\iint_\Sigma\begin{vmatrix}1&1&1\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ y&z&x\end{vmatrix}d\sigma=\frac{1}{\sqrt3}\iint_\Sigma(-1-1-1)d\sigma=-\sqrt3\iint_\Sigma d\sigma=-\sqrt3\pi a^2$$

5.

$\int_\Gamma\left(y^2-z^2\right)dx+\left(z^2-x^2\right)dy+\left(x^2-y^2\right)dz,\ \Gamma$ — кривая пересечения поверхности куба $|x|,|y|,|z|\le a$ плоскостью $x+y+z=\frac{3a}{2}$

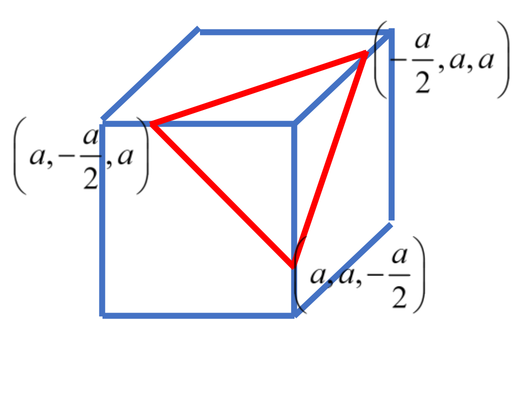
Решение_1.

$$x+y=\frac{a}{2},z=a;$$

$$I=3\int_{\left(-\frac{a}{2},a,a\right)}^{\left(a,-\frac{a}{2},a\right)}\left(y^2-a^2\right)dx+\left(a^2-x^2\right)dy=3\int_{\left(-\frac{a}{2},a,a\right)}^{\left(a,-\frac{a}{2},a\right)}\left(y^2-a^2\right)(-dy)+\left(a^2-x^2\right)(-dx)$$

$$=3\left(-\frac{y^3}{3}+a^2y-a^2x+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{\left(-\frac{a}{2},a,a\right)}^{\left(a,-\frac{a}{2},a\right)}=3\left(\frac{9a^3}{3\cdot8}-\frac{3}{2}a^3-\frac{3}{2}a^3+\frac{9a^3}{3\cdot8}\right)=$$

$$=3a^3\left(\frac{3}{4}-3\right)=-\frac{27}{4}a^3$$



Решение_2

$$I = \int\limits_{\Gamma} \left(y^2 - z^2\right) dx + \left(z^2 - x^2\right) dy + \left(x^2 - y^2\right) dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint\limits_{\Sigma} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} d\sigma = -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint\limits_{\Sigma} \left(y + z + z + x + x + y\right) d\sigma =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint\limits_{\Sigma} \left(2x + 2y + 2z\right) d\sigma = -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint\limits_{\Sigma} \left(x + y + z\right) d\sigma = -\frac{4 \cdot 3a}{2\sqrt{3}} \iint\limits_{\Sigma} d\sigma = -\frac{4\sqrt{3}a}{2} \left(\frac{3}{\sqrt{2}} a\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{27a^3}{4},$$